Werner Kratz
Marius Hofert

Universität Ulm
Wintersemester 2008/2009
08.01.2009

Übungen zur Analysis 2

Blatt 12

Abgabe und Besprechung, Donnerstag, den 15.01.2009

Aufgabe 54 (Skalarprodukt, Vektorprodukt und Spatprodukt) (4 Punkte)

Für Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ definiert man das Skalarprodukt $\langle a, b\rangle := \sum_{\nu=1}^{3} a_\nu b_\nu$, die *Norm* $|a| := \sqrt{\langle a, a\rangle}$, das *Vektorprodukt* $a \times b := (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)^T \in \mathbb{R}^3$ und das *Spatprodukt* $|a, b, c| := \langle a \times b, c\rangle$. Weiter sei $A = (a, b, a \times b) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Zeige, dass gilt:

(i) $|a, b, c| = \det(a, b, c)$, insbesondere gilt $\det A = |a \times b|^2 \geq 0$.

(ii) a und b sind linear unabhängig genau dann, wenn $a \times b \neq 0$ gilt.

(iii) $\langle a \times b, a\rangle = \langle a \times b, b\rangle = 0$, insbesondere gilt

$$A^T A = \begin{pmatrix} |a|^2 & \langle a, b\rangle & 0 \\ \langle a, b\rangle & |b|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |a \times b|^2 \end{pmatrix}$$

und $\det A^T A = (|a|^2|b|^2 - \langle a, b\rangle^2) \det A$.

(iv) $\det A = |a|^2|b|^2 - \langle a, b\rangle^2 = |a \times b|^2$, und somit gilt $|a \times b| = |a||b| \sin(\sphericalangle(a, b))$.

Aufgabe 55 (5 Punkte)

Berechne $\int_M f$ für

(a) $M = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x \in [1, 2], y \in [0, 1], z \in [0, 2] \right\} = [1, 2] \times [0, 1] \times [0, 2]$ und $f(x, y, z) = \frac{2z}{(x+y)^2}$.

(b) $M = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ fest) und $f(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^{1/3}$.

Hinweis: Verallgemeinerte Kugelkoordinaten $x = ar \sin\psi \cos\varphi$, $y = br \sin\psi \sin\varphi$, $z = cr \cos\psi$.

Aufgabe 56 (5 Punkte)

(a) Wie groß ist das Volumen des Körpers, der oben durch das Paraboloid $z = x^2 + y^2$ und unten von dem Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ begrenzt wird?

(b) Berechne den *Schwerpunkt* $S := \frac{1}{|M|} \left(\int_M x\, dx\, dy\, dz, \int_M y\, dx\, dy\, dz, \int_M z\, dx\, dy\, dz \right)^T$ von $M = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ und } x, y, z \geq 0 \right\}$.

Aufgabe 57 (4 Punkte)

Es sei k die Kurve mit der Parametrisierung $x(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3)^T : [0,1] \to \mathbb{R}^3$. Berechne die Länge von k und das Kurvenintegral ${}^{k}\!\!\int f$ für das Vektorfeld $f(x,y,z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$.

Aufgabe 58 (5 Punkte)

Es sei $\mathcal{F}$ die Oberfläche des Torus mit der Parametrisierung ($0 < r < R$ fest)

$$x(\psi, \varphi) = \begin{pmatrix} (R+r\sin\psi)\cos\varphi \\ (R+r\sin\psi)\sin\varphi \\ r\cos\psi \end{pmatrix} : K = [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3.$$

Berechne den zweidimensionalen Flächeninhalt von $\mathcal{F}$ und das Oberflächenintegral $\int_{\mathcal{F}} f$ für das Vektorfeld $f(x,y,z) = (x,y,z)$.

Aufgabe 59* (6 Punkte)

Berechne das Volumen folgender Mengen M und skizziere jeweils M.

(a) $M = \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq R^2, (x+R)^2 + y^2 \geq 2R^2 \}$ ($R > 0$ fest) „Möndchen des Hippokrates“.

(b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 \leq Rx \right\}$ ($R > 0$ fest) „Vivianischer Körper“.